

Le Site Musical et les zéros de Zêta

Face à la redoutable question des relations entre l'art musical et l'édifice mathématique, refusant les analogies de surface, je me suis imposé une exigence phénoménologique stricte :

Existe-t-il un lien profond entre musique et mathématiques ?

Je vais m'efforcer dans ce texte d'en exhiber un, qui, à mes yeux, est le plus profond que je connaisse. Le point de départ de ce lien est la formulation mathématique presque évidente de ce qui encode la gamme musicale. C'est simplement l'intervalle de toutes les fréquences, soit la demi-droite réelle $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Dans cette perception, nulle unité de mesure n'est requise, car l'intellection musicale procède par purs rapports, d'où l'inutilité de fixer une échelle absolue.

Ce qui joue un rôle fondamental, par contre, c'est l'action qui consiste à multiplier les fréquences par un nombre entier. L'harmonie, cette grâce perçue par l'oreille, s'incarne dans cette opération très simple : l'action multiplicative des nombres entiers. La multiplication par 2 engendre le passage à l'octave ; la multiplication par 3 détermine le saut de quinte subtilement tempéré, et ainsi de suite. Mathématiquement, l'écrin sémantique exact de cette situation est ce que nous nommerons le *site des fréquences*. Ce site est le produit semi-direct de l'intervalle $[0, \infty)$ par le monoïde multiplicatif des entiers strictement positifs \mathbb{N}^\times , agissant sur ce continuum par dilatation.

Immédiatement, l'esprit mathématique perçoit la limite de la topologie classique : elle s'avère inadaptée pour opérer le produit semi-direct d'un espace continu par l'action d'un monoïde discret ! Il faut pour cela, s'élever d'un degré d'abstraction. Fort heureusement, l'architecture visionnaire de Grothendieck — le cadre des *sites* et des *topos* — offre la syntaxe parfaite à cette opération conceptuelle.

Et l'on obtient, en faisant le produit semi-direct¹ de l'intervalle $[0, \infty)$ par les entiers positifs agissant par multiplication, un site, [2], qu'on appelle le

Site des Fréquences $:= [0, \infty) \ltimes \mathbb{N}^\times$

Le pas décisif consiste alors à démontrer que, de la seule essence de ce « site musical », les zéros de la fonction zêta de Riemann surgissent naturellement, sans même que l'on n'ait éprouvé le besoin de formuler la définition analytique de cette fonction.

Pour cela, il faut d'abord considérer l'ensemble des points du site des fréquences (du topos correspondant si on veut être plus abstrait). Il se fait que l'ensemble des points de ce topos coïncide avec un espace non-commutatif X que j'avais mis au jour voici une trentaine d'années, et qui donne la réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta comme un *spectre d'absorption*[1].

Pour être plus précis, considérons les fonctions sur cet espace géométrique X et l'opération de restriction vers ses points les plus élémentaires, lesquels correspondent à l'espace initial des fréquences. Cette restriction fait émerger un espace fonctionnel de dimension infinie, mais doté d'une dynamique naturelle : il hérite l'action du groupe continu des changements d'échelle, c'est-à-dire le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . Le point crucial consiste alors à calculer

1. Voir [3] pour la justification conceptuelle de cette notion

le spectre de l'action de ce groupe sur le quotient de l'espace des fonctions des fréquences par le sous-espace des fonctions obtenues par restriction de fonctions sur l'espace total. Le calcul de ce spectre utilise le groupe des caractères du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . Ce groupe n'est autre que le groupe additif des nombres réels. Dans ce dual, la manifestation des zéros de la fonction zêta est saisissante : lorsque des zéros reposent sagement sur la droite critique, ils s'incarnent en éléments purs du spectre, donnés par la partie imaginaire $\Im(z)$ du zéro z de zêta. S'il advenait que certains s'en écartent, ils se trahiraient par ce que la physique quantique nomme des *résonances*.

Tout cela bien entendu est sous-tendu par des mathématiques très précises, trop avancées d'une certaine manière pour tenir dans un exposé aussi court. Mais le message est clair. Le seul cadre de la musique suffit à atteindre au niveau le plus profond des mathématiques, qui est celui des zéros de la fonction zêta de Riemann.

Références

- [1] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [2] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the scaling site*. Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), no. 3, 1803-1850.
- [3] L. Bartoli, *Remark on the Scaling Site*.