Tourner autour d'un tore

Maths en mouvement - FSMP 2024

Frédéric Le Roux

14 novembre 2024

Deux systèmes dynamiques sur le tore

1. Le *flot vertical* sur le tore
2. Composition d'un flot vertical et d'un flot horizontal

Le tore $\mathbb{T}^2$

- Animation : Pac-Man sur un tore I
- Animation : Pac-Man sur un tore II

Le tore $\mathbb{T}^2$

- Animation : Pac-Man sur un tore I
- Animation : Pac-Man sur un tore II

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

$$f \circ \cdots \circ f(x, y) =$$

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

$$f \circ \cdots \circ f(x, y) = \Phi_n(x, y) =$$

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

$$f \circ \cdots \circ f(x, y) = \Phi_n(x, y) = (x, y + n * \sin(2\pi x))$$

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

$$f \circ \cdots \circ f(x, y) = \Phi_n(x, y) = (x, y + n * \sin(2\pi x))$$

$\longrightarrow$ On peut calculer les points fixes,

Premier système dynamique : Le flot vertical

Animation : flot vertical dans le modèle plan

$$\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$$

On veut itérer $f = \Phi_1 : (x, y) \mapsto (x, y + \sin(2\pi x))$.

$$f \circ \cdots \circ f(x, y) = \Phi_n(x, y) = (x, y + n * \sin(2\pi x))$$

$\longrightarrow$ On peut calculer les points fixes, les points périodiques, etc.

Second système dynamique : composition de deux flots

- Flot vertical : $\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$
- Flot horizontal : $\Psi_t(x, y) = (x + t * \sin(2\pi y), y)$

Second système dynamique : composition de deux flots

- Flot vertical : $\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$
- Flot horizontal : $\Psi_t(x, y) = (x + t * \sin(2\pi y), y)$

On veut itérer $g = \Psi_1 \circ \Phi_1$.

Second système dynamique : composition de deux flots

- Flot vertical : $\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$
- Flot horizontal : $\Psi_t(x, y) = (x + t * \sin(2\pi y), y)$

On veut itérer $g = \Psi_1 \circ \Phi_1$.

$$g \circ \cdots \circ g =$$

Second système dynamique : composition de deux flots

- Flot vertical : $\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$
- Flot horizontal : $\Psi_t(x, y) = (x + t * \sin(2\pi y), y)$

On veut itérer $g = \Psi_1 \circ \Phi_1$.

$$g \circ \cdots \circ g = \Psi_1 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Psi_1 \circ \Phi_1$$

Pas de formule explicite

Second système dynamique : composition de deux flots

- Flot vertical : $\Phi_t(x, y) = (x, y + t * \sin(2\pi x))$
- Flot horizontal : $\Psi_t(x, y) = (x + t * \sin(2\pi y), y)$

On veut itérer $g = \Psi_1 \circ \Phi_1$.

$$g \circ \cdots \circ g = \Psi_1 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Psi_1 \circ \Phi_1$$

Pas de formule explicite
$\longrightarrow$ Comment prédire le futur du point (x, y) ? Quelles sont les orbites périodiques ?

Animation : composé de deux flots dans le modèle plan

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h un homéomorphisme du plan qui commute aux translations entières.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.
On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) =$

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) =$

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) = \{0\} \times [-1, 1]$.

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) = \{0\} \times [-1, 1]$.
2. Second système dynamique : $\mathrm{rotation}(g) =$

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.

On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) = \{0\} \times [-1, 1]$.
2. Second système dynamique : $\mathrm{rotation}(g) =$

L'ensemble de rotation

(Michal Misiurewicz & Krystyna Ziemian, 1989)

Théorème-Définition

Soit h une transformation du plan provenant d'une déformation continue du tore.
On peut alors définir son *ensemble de rotation*,

$$\mathrm{rotation}(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right),$$

ou la limite est prise *au sens de Hausdorff*. C'est une partie convexe du plan.

Exemples :

1. Premier système dynamique : $\mathrm{rotation}(f) = \{0\} \times [-1, 1]$.
2. Second système dynamique : $\mathrm{rotation}(g) = [-1, 1]^2$.

(meilleure image)

Ensemble de rotation et orbites périodiques

Théorème (John Franks, 1989)

Si $\mathrm{rotation}(h)$ n'est pas inclus dans une droite, alors la transformation h admet une infinité d'orbites périodiques.

Ensemble de rotation et orbites périodiques

Théorème (John Franks, 1989)

Si $\mathrm{rotation}(h)$ n'est pas inclus dans une droite, alors la transformation h admet une infinité d'orbites périodiques.

Exemple :

$$\left(\frac{16}{2024}, \frac{11}{2024}\right) \in \,]-1,1[^2 = \mathrm{rotation}(g)$$

"donc" il existe une orbite périodique de période exactement 2024, qui fait 16 tours horizontalement et 11 tours verticalement.

Ensemble de rotation et orbites périodiques

Théorème (John Franks, 1989)

Si $\mathrm{rotation}(h)$ n'est pas inclus dans une droite, alors la transformation h admet une infinité d'orbites périodiques.

Exemple :

$$\left(\frac{16}{2024}, \frac{11}{2024}\right) \in \left]-1, 1\right[^2 = \mathrm{rotation}(g)$$

"donc" il existe une orbite périodique de période exactement 2024, qui fait 16 tours horizontalement et 11 tours verticalement.

"Gros ensemble de rotation $\Rightarrow$ dynamique riche"

L'ensemble de rotation : formes possibles ?

Question ouverte : existe-t-il une transformation du tore dont l'ensemble de rotation est un disque ?

Le graphe des courbes

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

Le graphe des courbes

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

- **Sommets :** les courbes *fermées simples essentielles* du tore.

Le graphe des courbes

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

- **Sommets :** les courbes *fermées simples essentielles* du tore.
- **Arêtes :** α—$\beta \iff \mathrm{card}(\alpha \cap \beta) \leq 1$.

Le graphe des courbes

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

- **Sommets :** les courbes *fermées simples essentielles* du tore.
- **Arêtes :** α—$\beta \iff \mathrm{card}(\alpha \cap \beta) \leq 1$.

Exemples :

On part d'un cercle horizontal α_0.

1. Les courbes $f^n(\alpha_0)$.
2. Les courbes $g^n(\alpha_0)$.

Ensemble de rotation et graphe des courbes

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Kathryn Mann, Emmanuel Militon, Richard Webb
2021

Théorème

L'ensemble de rotation de h n'est pas contenu dans une droite **si et seulement si** l'action de h sur le graphe des courbes est *loxodromique* : il existe $C > 0$ tel que pour toute courbe fermée, simple essentielle α et tout $n > 0$,

$$d(\alpha, h^n(\alpha)) > Cn$$

où d est la distance dans le graphe des courbes.

Graphe des courbes et géométrie hyperbolique

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

Théorème

Ce graphe est connexe, et *hyperbolique* (au sens de Gromov, 1987).

Graphe des courbes et géométrie hyperbolique

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

Théorème

Ce graphe est connexe, et *hyperbolique* (au sens de Gromov, 1987).

Graphe des courbes et géométrie hyperbolique

Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, Richard Webb 2019

Théorème

Ce graphe est connexe, et *hyperbolique* (au sens de Gromov, 1987).

Moralité : on peut étudier la dynamique des homéomorphismes du tore à l'aide des outils de la géométrie hyperbolique.