

Formes modulaires et leurs applications

Farrell Brumley
IMJ-PRG
Sorbonne Université

Maths en mouvement 2025
Théorie des nombres

Reconnaissez-vous la suite

0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, ...?

Ce sont les entiers qui sont sommes de deux carrés : $n = a^2 + b^2$.

Question de nos ancêtres

Quand est-ce qu'on peut représenter un entier positif par une somme de k carrés, avec $k \geq 2$?

◇ Aspect arithmétique : représenter un entier par une forme quadratique en k variables : ici

$$q(x_1, \dots, x_k) = x_1^2 + \dots + x_k^2.$$

La question se pose pour des formes quadratiques plus générales.

◇ Aspects géométriques et statistiques : il s'agit des points entiers sur une sphère de rayon $\sqrt{n}$ en dimension k , car

$$q(x) = n \text{ signifie } x \in \mathbb{Z}^k \text{ tel que } \|x\|^2 = n.$$

Lagrange (1770)

Tout entier positif est somme de 4 carrés.

Ainsi tout nombre positif est somme de $k \geq 4$ carrés.

Le cas de deux carrés est plus subtil: la suite est lacunaire.

Par exemple, si p est un nombre premier, Fermat a observé que

$$p = \square + \square \quad \text{si, et seulement si,} \quad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

En revanche, que p soit congru à 1 ou 3 modulo 4, les puissances paires vérifient bien évidemment $p^{2\alpha} = \square + \square$.

Euler (1749)

Un entier positif n est somme de 2 carrés précisément lorsque

*les nombres premiers $p \equiv 3 \pmod{4}$ qui divisent n
le divisent par une puissance paire.*

On pose

$$R_k(n) = \{x \in \mathbb{Z}^k : \|x\|^2 = n\}.$$

On peut essayer de calculer le nombre de solutions $r_k(n) = |R_k(n)|$.



Les premiers cas pairs $k = 2, 4, 6, 8$ sont dûs à Jacobi.

Le cas de $k = 2$

Jacobi (1829)

On a

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)),$$

où

$$d_a(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv a \pmod{4}}} 1.$$

Par exemple,

- ◇ si $p \equiv 1 \pmod{4}$ nous avons $r_2(p) = 8$, en comptant les changements de signes et d'ordre;
- ◇ si $p \equiv 3 \pmod{4}$ alors $d_1(p) = d_3(p) = 1$ et nous avons $r_2(p) = 0$, comme prévu par Euler.

Jacobi (1829)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d,$$

$$r_6(n) = 16 \sum_{d|n} \chi(n/d) d^2 - 4 \sum_{d|n} \chi(d) d^2,$$

où $\chi(d) = 1, 0, -1$ selon la classe de d modulo 4, et

$$r_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3.$$

D'autres formules, sous forme

$$r_k(n) = \sum_{d|n} (\text{poids}) d^{k/2-1} + O(d^{k/4-1/2}),$$

sont disponibles pour $k > 8$ pair, par les travaux de Deligne (1974).

Formes modulaires

Les **formes modulaires** sont des fonctions holomorphes sur le disque hyperbolique

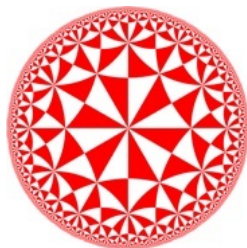
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

qui se transforment par un

groupe discret de symétries arithmétiques,

tel que (un conjugué dans $SL_2(\mathbb{C})$ de)

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}) : \det g = 1\}.$$



L'artiste néerlandais [M.C. Escher \(1898-1972\)](#) s'est inspiré des tessellations du disque hyperbolique pour une série d'oeuvres.



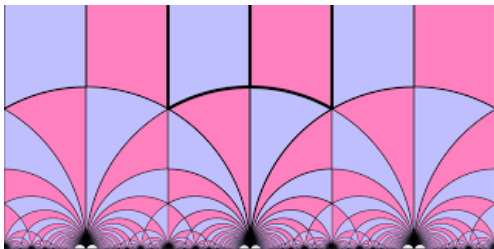
Escher : Circle Limit III (1959)

Plus exactement, une **forme modulaire de poids** $\kappa \in \mathbb{N}$ pour un sous-groupe discret $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ sur le demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}, \quad ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2),$$

de croissance modérée, qui se transforme selon la règle

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^\kappa f(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$



Une tessellation de $\mathbb{H}$ par les symétries de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

La fonction Δ de Ramanujan

Lorsque $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, l'espace quotient $Y = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ s'appelle **la courbe modulaire**. Les points de Y correspondent aux courbes elliptiques définies sur $\mathbb{C}$, à isomorphisme près:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).z \longleftrightarrow [E_z = \mathbb{C}/\Lambda_z], \quad \Lambda_z = \mathbb{Z}.z + \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}.$$

La fonction $\Delta(z) = \mathrm{Disc}(E_z)$ de Ramanujan (1887-1920)



est une forme modulaire de poids 12 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dite **parabolique**.

Preuve du théorème de Jacobi

Soit

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{4} \right\}.$$

L'une des propriétés fondamentales des formes modulaires pour $\Gamma_0(4)$ est qu'elles possèdent un **développement de Fourier**

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i z},$$

dû à l'invariance $f(z+1) = f(z)$.

Stratégie

Démontrer les formules de Jacobi à partir de deux constructions des formes modulaires de poids $\kappa = k/2 = 2, 3, 4$ pour $\Gamma_0(4)$:

- 1 les séries d'Eisenstein,
- 2 les séries thêta,

et une comparaison de leurs coefficients de Fourier.

Construction des formes modulaires I : séries d'Eisenstein

Certaines formes modulaires proviennent des espaces plus simples que la courbe modulaire. Par exemple, en partant de la fonction

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^{-\kappa},$$

on peut construire, pour $\kappa > 2$, la *série d'Eisenstein*

$$G_{\kappa}(z) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad G_{\kappa}(z) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_z \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-\kappa},$$

qui vérifie la propriété de transformation de poids κ par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Par leur construction simple, on peut calculer facilement les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein G_{κ} :

$$G_{\kappa}(z) = a + b \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} d^{\kappa-1} \right) q^n,$$

pour des constantes $a, b \in \mathbb{C}^{\times}$.

Construction des formes modulaires II : séries thêta

De l'autre côté, avec $\kappa = k/2$, nous pouvons définir *directement*

$$\Theta_{\kappa}(z) = \sum_{n \geq 0} r_k(n) q^n,$$

ce qu'on appelle une *série thêta*. ($k \geq 4$ est pair, donc $\kappa \in \mathbb{N}_{\geq 2}$)

Fait fondamental (par la formule sommatoire de Poisson)

Θ_{κ} est une forme modulaire de poids κ pour $\Gamma_0(4)$.

Comme en poids $\kappa = 2, 3, 4$, il n'y a pas de formes paraboliques:

Θ_{κ} est combinaison linéaire des séries d'Eisenstein G_{κ} .

Une égalisation des coefficients de Fourier donne

$r_k(n)$ est combinaison linéaire des sommes $\sum_{d|n} d^{k/2-1}$,

ce qui démontre le théorème de Jacobi.



Aspects géométriques et statistiques

Des recherches plus récentes s'intéressent à la

distribution en espace

des solutions $R_k(d)$, lorsque $d \rightarrow \infty$.

Prenons le cas $k = 3$: $R_3(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = d\}$.

Legendre, Gauss (1801)

Soit $d \geq 1$ un entier sans facteurs carrés. Alors

$$R_3(d) \neq \emptyset \quad \text{si, et seulement si,} \quad d \not\equiv 7 \pmod{8}.$$

Dans ce cas, compter les solutions est déjà un sujet très riche.

Gauss (1801)

Si $d \not\equiv 7 \pmod{8}$ sans facteurs carrés, alors

$$r_3(d) = (12 \text{ ou } 24) |\text{Cl}_d|,$$

où Cl_d est le groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Comme

① $|Cl_d| = (\text{cste})\sqrt{d}L(1, \chi_d)$, par une formule de Dirichlet,

② et $d^{-\epsilon} \ll_{\epsilon} L(1, \chi_d) \ll d^{\epsilon}$, par les travaux de Siegel,

on en déduit que

$$d^{1/2-\epsilon} \ll_{\epsilon} r_3(d) \ll_{\epsilon} d^{1/2+\epsilon}.$$

On constate la nature très différente des cas précédents $k \geq 2$ pair.

Pour d admissible (comme ci-dessus), on considère maintenant

$$\{x/\|x\| : x \in R_3(d)\} \subset S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\},$$

la projection des solutions sur la sphère de rayon 1.

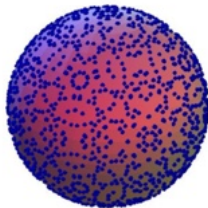


Figure: $d=104851$

On munit S^2 de sa mesure de Lebesgue μ_{S^2} , invariante par des rotations, normalisée pour donner une mesure de probabilité.

Iwaniec, Golubeva-Fomenko, Duke (1987-1988)

Lorsque $d \rightarrow +\infty$ le long des entiers d admissibles, les points

$$d^{-1/2}R_3(d) \subset S^2$$

deviennent *équirépartis* dans S^2 . Autrement dit, si $\Omega \subset S^2$ est un ouvert de bord négligeable, alors

$$\lim_{\substack{d \rightarrow +\infty \\ d \text{ admissible}}} \frac{|\{x \in R_3(d) : d^{-1/2}x \in \Omega\}|}{r_3(d)} = \mu_{S^2}(\Omega).$$

La preuve passe par les bornes sur les coefficients de Fourier des formes modulaires paraboliques de poids un *demi-entier* $\kappa = 3/2$.

D'autres preuves existent aujourd'hui, qui passent par les fonctions L des fonctions modulaires....

Formes paraboliques et fonctions L

Nous avons laissé de côté la forme parabolique

$$\Delta(z) = \text{disc}(E_z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n \quad (q = e^{2\pi iz}).$$

Ses coefficients de Fourier sont bien plus mystérieux que $\sum_{d|n} d^{\kappa-1}$.

Pour étudier les coefficients $\tau(n)$ on construit la série génératrice

$$L(s, \Delta) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} \quad (\text{Re } s > 7),$$

appelée *fonction* L , généralisation de la fonction zêta de Riemann.

Mordell (1917), Hecke (1925)

La fonction $L(s, \Delta)$

- 1 admet un *produit eulérien* $L(s, \Delta) = \prod_p (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}$, pour $\text{Re } s > 7$, et
- 2 se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\Lambda(s, \Delta) = \Lambda(12 - s, \Delta)$, où $\Lambda(s, \Delta) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, \Delta)$.

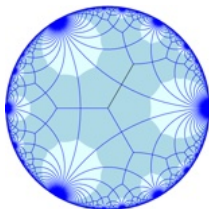
Vers le monde p -adique (et l'exposé suivant)

Sur la courbe modulaire

$$Y = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} = \{\text{courbes elliptique } E \text{ sur } \mathbb{C}\} / \text{iso},$$

il existe des symétries cachées pour chaque nombre premier p :

chaque E a $p + 1$ voisins $E_1, \dots, E_{p+1}$, p -isogènes à E .



Hecke a défini un opérateur T_p sur les formes modulaires

$$(T_p f)(E) = \sum_{i=1}^{p+1} f(E_i).$$

qui prend en compte cette symétrie et a montré $T_p \Delta = \tau(p) \Delta$.

Merci pour votre attention !

